Exame final nacional de Matemática A **(2019, Época especial)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

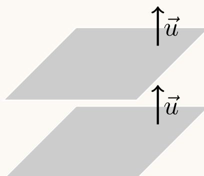
1.1. Substituindo o valor da ordenada do ponto A, $y_A = 4$ na equação da reta r, podemos calcular o valor de k, e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \underset{y=4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = k \\ z = 1 + 5 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$

Observando a equação do plano α podemos verificar que $\vec{u} = (2,3,-1)$ é um vetor normal do plano α, e também de todos os planos paralelos ao plano α, cujas equações são da forma:

$$2x + 3y - z + d = 0$$



Como as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$, e este pertence ao plano pretendido, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(1) + 3(4) - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A é:

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$

1.2. As coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano α, para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5) = (1 + 0 \times k \ , \ 2 + 1 \times k \ , \ 1 + 5 \times k) = (1 \ , \ 2 + k \ , \ 1 + 5k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano α podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(1) + 3(2+k) - (1+5k) - 9 = 0 \ \Leftrightarrow \ 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \ \Leftrightarrow \ -2k - 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ -2k = 2 \ \Leftrightarrow \ k = \frac{2}{-2} \ \Leftrightarrow \ k = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α, ou seja as coordenadas do ponto P, são:

$$\big(1 \ , \ 2 + (-1) \ , 1 + 5(-1)\big) = (1,1,-4)$$

2.

2.1. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial $\big(P(X = k) = {}^nC_k \, p^k \, q^{n-k}\big)$.

Temos que:

- $n = 5$ (repete-se o lançamento do dado por cinco vezes).
- $p = \frac{1}{4}$ (a probabilidade do sucesso, ou seja «*Sair face 4*» é $\frac{1}{4}$, porque o dado tem quatro faces e apenas uma delas tem o número 4).
- $q = \frac{3}{4}$, a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Assim, calculando a probabilidade de sair face 4 exatamente três vezes ($k = 3$), e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$P(X = 3) = {}^5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0{,}09$$

Resposta: **Opção D**

2.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 8), podemos calcular o valor de $\cos\alpha$ recorrendo à Lei dos cossenos:

$$8^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos\alpha \ \Leftrightarrow \ 64 = 25 + 16 - 40\cos\alpha \ \Leftrightarrow \ 40\cos\alpha = 41 - 64 \ \Leftrightarrow \ \cos\alpha = \frac{-23}{40}$$

Como α é um ângulo interno de um triângulo ($0° < \alpha < 180°$), temos que a sua amplitude, em graus, arredondada às unidades, é:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{23}{40}\right) \approx 125°$$

Resposta: **Opção D**

3.

3.1. Como existem 9 cartões no saco e são retirados simultaneamente 4, o número de conjuntos diferentes de 4 cartões que é possível escolher, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^9C_4$

De entre estes ${}^9C_4$ conjuntos de 4 cartões, os que contêm apenas os números 3 e 8, e, adicionalmente são compostos por mais dois números compreendidos entres os anteriores (4, 5, 6 e 7) corresponde a considerar o número de conjuntos de dois cartões que podem ser formados com quatro cartões identificados.
Assim, o número de conjuntos compostos pelo cartão 3, pelo cartão 8 e por mais dois cartões cujos números estão compreendidos entres estes - ou seja, o número de casos favoráveis - é ${}^4C_2$

Desta forma, a probabilidade de o menor dos números saídos ser 3 e o maior ser 8, é:

$$p = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_4} = \frac{1}{21}$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Nas condições indicadas pretende-se colocar os cartões numa fila que pode ser dividida em duas partes - a primeira com três posições e a segunda com seis posições.

Como na primeira parte da fila existem três posições onde podem ser colocados quatro cartões (2, 3, 5, e 7), e a ordem dos cartões é relevante, o número de formas diferentes de ocupar os três primeiros lugares da fila é ${}^4A_3$

Para a segunda parte da fila, com seis posições, existem 6 números disponíveis para os ocupar (o número primo que não foi colocado antes e todos os restantes), pelo que o número de disposições dos lugares é ${}^6A_6 = P_6 = 6!$

Assim, o número de maneiras diferentes de colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos, é:

$${}^4A_3 \times {}^6A_6 = 17\,280$$

4. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
Q:≪O aluno está matriculado na disciplina de Química≫
H:≪O aluno é um rapaz≫

Temos que $P\left(\overline{H}\right) = 2 \times P(Q)$; $P\left(\overline{H}|Q\right) = \frac{1}{3}$ e $P\left(\overline{Q}|H\right) = \frac{1}{2}$

Assim, considerando $P(Q) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

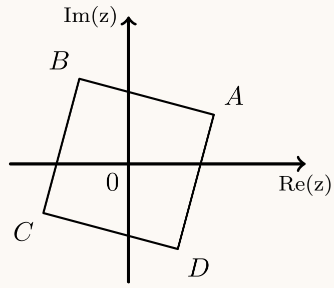
- $P\left(\overline{H}\right) = 2k$
- $P\left(\overline{H} \cap Q\right) = P(Q) \times P\left(\overline{H}|Q\right) = k \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$
- $P(H) = 1 - P\left(\overline{H}\right) = 1 - 2k$
- $P\left(\overline{Q} \cap H\right) = P(H) \times P\left(\overline{Q}|H\right) = (1-2k) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k$
- $P(H \cap Q) = P(H) - P\left(\overline{Q} \cap H\right) = 1 - 2k - \left(\frac{1}{2} - k\right) =$
$= 1 - 2k - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} - k$

	Q	$\overline{Q}$	
H	$\frac{1}{2} - k$	$\frac{1}{2} - k$	$1 - 2k$
$\overline{H}$	$\frac{k}{3}$		$2k$
	k		1

Assim, temos que probabilidade do aluno escolhido ao acaso estar matriculado na disciplina de Química é o valor de k, ou seja a solução da equação:

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P\left(\overline{H} \cap Q\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - k + \frac{k}{3} \Leftrightarrow 6k = 3 - 6k + 2k \Leftrightarrow 10k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$

5. Como os pontos A e C são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_1 = -z_3$ (alternativamente podemos verificar que $-z_1 = z_1 \times i^2 = z_1 \times i \times i = z_2 \times i = z_3$)



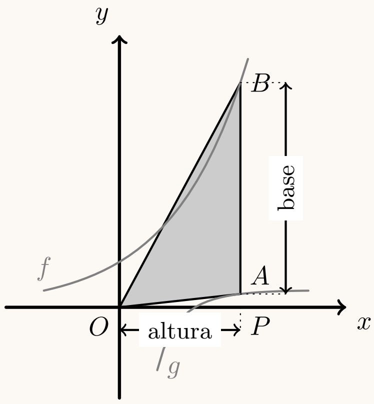
De forma análoga temos que os pontos B e D são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_2 = -z_4$

Assim, temos que

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$

Resposta: **Opção A**

6. Considerando como a base do triângulo o lado $[AB]$, temos que:



$$\overline{AB} = f(a) - g(a) = e^a - \frac{\ln a}{a}$$

Considerando o ponto P (de ordenada nula e abcissa a), temos que a altura correspondente à base anterior é $[OP]$, e que:

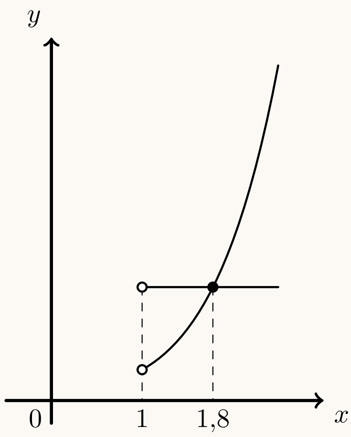
$$\overline{OP} = a$$

Pelo que a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de a, por:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{\left(e^a - \frac{\ln a}{a}\right) \times a}{2} = \frac{ae^a - \ln a}{2}, \ (a > 1)$$

Assim, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, é a solução da equação:

$$\frac{ae^a - \ln a}{2} = 5$$



Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $y = \frac{xe^x - \ln x}{2}$, e a reta horizontal de equação $y = 5$, numa janela compatível com a restrição do valor de a ($x > 1$), (reproduzido na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) para a abcissa do ponto de interseção, ou seja, a solução da equação:

$$x \approx 1{,}8$$

7. Observando a expressão da sucessão, temos que:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n \times (-1)^1}{n+1} = -\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Desta forma, quando n é ímpar, todos os termos são positivos, pelo que, $u_n > -0{,}01$

Quando o n é par, temos que:

$$u_n > -0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{100} < 0 \Leftrightarrow \frac{100-n-1}{100(n+1)} < 0 \underset{100(n+1)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 100 - n - 1 < 0 \Leftrightarrow -n < -99 \Leftrightarrow n > 99$$

Ou seja, os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 para ordens pares superiores a 99 e também para todas as ordens ímpares, ou seja, a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 é 99.

8. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = k$, calculando $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \ \text{(Indeterminação)}$$

Verificando que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, usando, por exemplo, a fórmula resolvente, temos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Assim, como $f(1) = k$, e f é contínua, temos que $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$

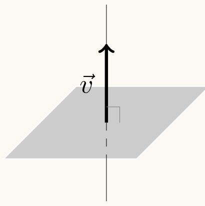
Resposta: **Opção C**

Caderno 2

9.

9.1. Reescrevendo a equação da reta r, temos que:

$$1 - x = y \wedge z = 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} \wedge z = 3$$



O que nos permite identificar um vetor diretor da reta, $\vec{v}_r = (-1{,}1{,}0)$

Como o plano deve ser perpendicular à reta r, o vetor diretor da reta deve ser colinear com o vetor normal do plano.

Assim, identificando os vetores normais dos planos relativos a cada opção apresentada, e identificando qual deles é colinear com o vetor diretor da reta, temos:

- Vetor normal do plano: $\vec{u}_A = (1{,}1{,}0)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_B = (1,-1{,}0) = -(-1{,}1{,}0) = -\vec{v}_r$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_C = (1{,}1{,}3)$
- Vetor normal do plano: $\vec{u}_D = (1,-1{,}3)$

Resposta: **Opção B**

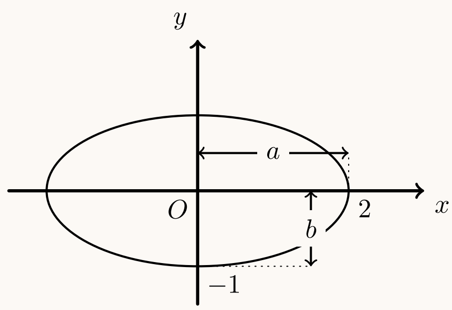
9.2. Como a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados, os pontos identificados (por estarem sobre os eixos são vértices da elipse).

Assim, temos que a medida do semieixo maior é $a = 2$ e que a medida do semieixo menor é $b = 1$
Desta forma a semidistância focal (c) pode ser calculada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = c^2 \underset{c>0}{\Rightarrow} c = \sqrt{3}$$

Ou seja a distância focal é:

$$2c = 2\sqrt{3}$$



Resposta: **Opção B**

10. Escrevendo $1+i$ na f.t. temos $1+i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

E assim $1+i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, pelo que:

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \times e^{i\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{i\pi} = -4$$

Assim, simplificando a expressão de z, como $i^{15} = i^{4\times 3+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z = \frac{5+(1+i)^4}{2+2i^{15}} - \frac{i}{2} = \frac{5+(-4)}{2+2(-i)} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2-2i} - \frac{i}{2} = \frac{2}{4-4i} - \frac{2i-2i^2}{4-4i} = \frac{2-2i-(-2\times(-1))}{4-4i} =$$

$$= \frac{-2i}{4-4i} = \frac{-i}{2-2i} = \frac{-i(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{-2i-2i^2}{2^2-(2i)^2} = \frac{-2i-2(-1)}{4-4\times(-1)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Escrevendo z na forma trigonométrica ($w = \rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim $z = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, e z^n é dado por:

$$z^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n e^{i\left(n\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Para que z^n seja um número real negativo, $\operatorname{Arg}(z^n) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim, atribuindo valores a n, temos que:

- $n=1$, $\operatorname{Arg}(z^n) = 1\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $(\neq \pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=2$, $\operatorname{Arg}(z^n) = 2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ $(\neq \pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=3$, $\operatorname{Arg}(z^n) = 3\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ $(\neq \pi + 2k\pi, k\in\mathbb{Z})$
- $n=4$, $\operatorname{Arg}(z^n) = 4\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4\pi}{4} = -\pi$

Desta forma, o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo é 4

11. Como $(f\circ g)(x) = 7$ e $f(x) = 2x+1$, temos que:

$$(f\circ g)(x) = 7 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = 7 \Leftrightarrow 2\big(g(x)\big)+1 = 7 \Leftrightarrow 2\big(g(x)\big) = 7-1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{6}{2} \Leftrightarrow g(x) = 3$$

Resposta: **Opção B**

12.

12.1. Temos que:

- Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{8}{9}$
- Pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = \frac{8}{9}$
- Como são independentes $(P(A \cap B) = P(A) \times P(B))$ vem que $1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - \big(P(A) \times P(B)\big) = \frac{8}{9}$
- Como os acontecimentos são equiprováveis $(P(B) = P(A))$, vem que $1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9}$

Assim, resolvendo a equação temos:

$$1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A)>0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\lim\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right) = \lim\left(\left(\frac{n}{n} + \frac{2}{n}\right)^{n \times \frac{1}{4}}\right) = \lim\left(\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\lim\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(e^2\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Assim, temos que:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}}} f(x) = \lim_{x \to e^{\frac{1}{2}}} \ln x = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

13.

13.1. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada, começamos por determinar a derivada da função para $x = -1$:

$$\big(x\ln(1-x)\big)' = (x)'\ln(1-x) + x\big(\ln(1-x)\big)' = 1 \times \ln(1-x) + x \times \frac{(1-x)'}{1-x} =$$

$$= \ln(1-x) + x \times \frac{0-1}{1-x} = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é:

$$g'(-1) = \ln(1-(-1)) - \frac{-1}{1-(-1)} = \ln 2 + \frac{1}{2} = 0{,}5 + \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

13.2. Começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x\,(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{x} \times \frac{1}{1-e^{-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{x}\right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} - 3\right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = (0-3) \times \frac{1}{1-0} = -3 \times 1 = -3$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - (-3)x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + 3x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + \frac{3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x\times\frac{1}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-e^{-\infty}} = \frac{1-\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1-0} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1} = 1-0 = 1$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = -3x + 1$$

14.

14.1. Como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$, calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to0} \frac{f(\pi-x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi-x)}{2+\cos(\pi-x)}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} 0^+}{0(2-\cos 0)} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{2-\cos x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{2-\cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{2-\cos 0} = 1 \times \frac{1}{2-1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

14.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, no intervalo $]0,\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\,(2+\cos x) - \operatorname{sen} x\,(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(2+\cos x) - \operatorname{sen} x\,((2)' + (\cos x)')}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x\,(0 - \operatorname{sen} x)}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($]0,\pi[$), vem:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x + 1 = 0 \;\wedge\; \underbrace{(2+\cos x)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\cos x = -1 \;\Leftrightarrow\; \cos x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow\; \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in]0,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2\pi}{3} \vee x = -\dfrac{2\pi}{3} \quad \left(-\dfrac{2\pi}{3} \notin]0,\pi[\right)$
- $k = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \quad \left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi \notin]0,\pi[\;\text{ e }\; \dfrac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[\right)$

Assim, temos que $f'(x)$ tem um zero em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos x + 1$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$(2+\cos x)^2$	n.d.	$+$	$+$	$+$	n.d.
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Cálculos auxiliares:

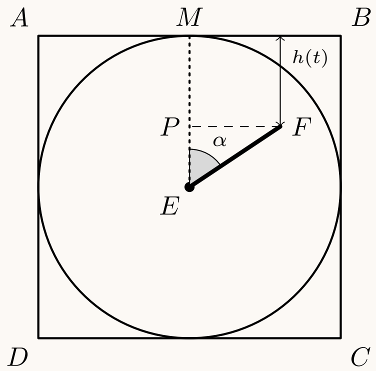
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2} + 1}{\left(2+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2\times 0 + 1}{(2+0)^2} = $$
$$= \frac{1}{4} > 0$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2\cos\frac{5\pi}{6} + 1}{\left(2+\cos\frac{5\pi}{6}\right)^2} =$$
$$= \frac{2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}{(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{3}+1}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)^2} < 0$$

Assim, podemos concluir que a função f, no intervalo $]0,\pi[$:

- é crescente no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$;
- tem um máximo relativo para $x = \frac{2\pi}{3}$, cujo valor é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



15. Designando por M o ponto médio do lado $[AB]$ e por α o ângulo $F\hat{E}M$, (como indicado na figura ao lado), e ainda, considerando o ponto P como a projeção ortogonal do ponto F sobre o segmento de reta EM, usando a definição de cosseno, temos que:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{EP}}{3{,}5} \Leftrightarrow \overline{EP} = 3{,}5\cos\alpha$$

Assim, como $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ cm, e considerando o segmento de reta EM como o lado origem do ângulo α, temos que a distância do ponto F à reta AB, t horas após as zero horas, é dada por:

$$h(t) = \overline{EM} - \overline{EP} = 4{,}5 - 3{,}5\cos\alpha$$

Estabelecendo a proporção do tempo, em horas, com a amplitude do ângulo α correspondente, temos que:

$$\frac{12}{2\pi} = \frac{t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi\times t}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi\times t}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}\,t$$

Ou seja, definindo a função h em função de t, temos:

$$h(t) = 4{,}5 - 3{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$